一个包含 Euler 函数及 k 阶 Smarandache ceil 函数的方程及其正整数解

朱敏慧

(西安工程大学理学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 设 $k \geq 2$ 为给定的整数. 对任意正整数 n, k 阶 Smarandache ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为 $S_k(n) = \min\{x: x \in \mathbb{N}, n \mid x^k\}$. 本文的主要目的是利用初等方法研究函数方程 $S_k(n) = \phi(n)$ 的可解性, 并给出该方程的所有正整数解, 其中 $\phi(n)$ 为 Euler 函数.

关键词: k 阶 Smarandache ceil 函数; Euler 函数; 方程; 正整数解

中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2009)02-0414-03

1 引言

设 $k \geq 2$ 为给定的整数. 对任意正整数 n, 著名的 k 阶 Smarandache ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为 $S_k(n) = \min\{x: x \in \mathbb{N}, n \mid x^k\}$. 例如当 $k = 2$ 时, $S_2(n)$ 的前几个值为: $S_2(1) = 1$, $S_2(2) = 2$, $S_2(3) = 3$, $S_2(4) = 2$, $S_2(5) = 5$, $S_2(6) = 6$, $S_2(7) = 7$, $S_2(8) = 4$, $S_2(9) = 3$, $S_2(10) = 10$, $S_2(11) = 11$, $S_2(12) = 6$, $S_2(13) = 13$, $S_2(14) = 14$, $S_2(15) = 15, \cdots$. 当 $k = 3$ 时, $S_3(2) = S_3(4) = S_3(8) = 2$, $S_3(16) = 4$, $S_3(3) = S_3(9) = S_3(27) = 3$, $S_3(81) = 9, \cdots$.

这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家 Smarandache 教授在他所著的 "Only Problems, Not Solutions" 一书中引入的, 并建议人们研究它的各种性质! 显然容易验证 $S_k(n)$ 是一个可乘函数, 且当 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 时有 $S_k(n) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$, 其中 $\beta_i = \left[\frac{\alpha_i + k - 1}{k}\right]$, $i = 1, 2, \cdots, r$. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

关于这一内容及其有关问题, 不少学者也进行了研究, 得出了一些有趣的结论 [2-6]. 例如文 [4] 中研究了 $\Omega(S_k(n))$ 的均值性质, 并证明了下面的结论:

对任意实数 $x > 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} \Omega(S_k(n)) = x \ln\ln x + Ax + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

其中

$$A = \gamma + \sum_p \left(\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)$$

γ 是 Euler 常数, $\sum\limits_p$ 表示对所有素数求和, $\Omega(n)$ 表示 n 的所有素因子的个数, 包括重数在内.

收稿日期: 2008-06-23.

基金项目: 国家自然科学基金 (10671155), 陕西省教育厅科研专项基金 (07JK267).

作者简介: 朱敏慧 (1977-), 讲师, 研究方向: 数论.

文 [5] 研究了函数 $S_k(n)$ 的对偶函数 $\overline{S}_k(n)$ 的性质, 并给出了 $d(\overline{S}_k(n))$ 的均值的一个较强的渐近公式, 即就是当 $k \geq 2$ 时, 有

$$\sum_{n\leq x} d(\overline{S}_k(n)) = \zeta(k)x + \zeta\left(\frac{1}{k}\right)x^{\frac{1}{k}} + O\left(x^{\frac{1}{k+1}}\right)$$

其中 $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数, $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta- 函数.

本文的主要目的是研究函数方程 $S_k(n) = \phi(n)$ 的可解性, 并求出该方程的所有正整数解, 其中 $\phi(n)$ 为 Euler 函数. 具体地说也就是利用初等方法证明下面两个结论:

定理 1　对任意正整数 n, 方程 $S_2(n) = \phi(n)$ 成立当且仅当 $n = 1,\ 4,\ 8,\ 18,\ 54$.

定理 2　设 $k \geq 3$ 为给定的整数. 则对任意正整数 n, 方程 $S_k(n) = \phi(n)$ 成立当且仅当 $n = 1, 4, 18$.

2　定理的证明

这节利用初等方法直接给出定理的证明. 文中所用到 Euler 函数的性质均可以在文 [7-8] 中找到, 所以这里不必重复!

首先证明定理 1.

显然 $n = 1$ 是方程 $S_2(n) = \phi(n)$ 的一个解. $n = 2$ 不是该方程的解! 如果该方程有其它解 $n \geq 3$, 那么 n 一定为偶数, 因为当 $n \geq 3$ 时, Euler 函数 $\phi(n)$ 为偶数!

当 $n = 2^\alpha$ 时, 因为 $\phi(2^\alpha) = 2^{\alpha-1}$; 当 α 为奇数时, $S_2(2^\alpha) = 2^{\frac{\alpha+1}{2}}$; 当 α 为偶数时, $S_2(2^\alpha) = 2^{\frac{\alpha}{2}}$. 所以当 $\alpha \geq 1$ 时, 方程 $S_2(2^\alpha) = \phi(2^\alpha)$ 成立当且仅当 $2^{\alpha-1} = 2^{\frac{\alpha+1}{2}}$, 如果 α 为奇数, 此时 $\alpha = 3$; $2^{\alpha-1} = 2^{\frac{\alpha}{2}}$, 如果 α 为偶数, 此时 $\alpha = 2$. 所以 $n = 4,\ 8$ 是方程 $\phi(n) = S_2(n)$ 的两个解!

当 n 含有至少两个素因子时, 不妨设 $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 其中 $\alpha \geq 1$, $r \geq 1$.

首先如果这样的 n 满足方程 $S_2(n) = \phi(n)$, 由函数 $S_2(n)$ 的定义并注意 $r \geq 1$ 不难推出 $\alpha = 1$, 因为当 $\alpha > 1$ 时, $2^\alpha \mid \phi(n)$, 且 $\alpha > \frac{\alpha+1}{2} > \frac{\alpha}{2}$, 所以由 $S_2(n)$ 的定义及可乘性知方程 $S_2(n) = \phi(n)$ 不可能成立!

其次由 Euler 函数的定义容易推出 $r < 2$. 因为, 如果 $r \geq 2$, 那么 $2^{\alpha+1} \mid \phi(n)$, 但是 $S_2(2^\alpha) = 2^{\frac{\alpha}{2}}$ 或者 $2^{\frac{\alpha+1}{2}}$, 而 $\alpha + 1 > \frac{\alpha+1}{2} > \frac{\alpha}{2}$, 所以当 $r \geq 2$ 时方程 $S_2(n) = \phi(n)$ 不可能成立! 于是不妨假定 $n = 2^\alpha p^\beta$, 显然由函数 $\phi(n)$ 及 $S_2(n)$ 的定义可推出 $\beta \leq 3$ 及 $4 \nmid (p-1)$. 因为如果 $\beta \geq 4$, 那么 $p^{\beta-1} \mid \phi(p^\beta)$, 但是 $S_2\left(p^\beta\right) = p^{\frac{\beta}{2}}$ 或者 $2^{\frac{\beta+1}{2}}$, 而 $\beta - 1 > \frac{\beta+1}{2} > \frac{\beta}{2}$, 这是不可能, 所以 $\beta \leq 3$. 再因为, 如果 $4 \mid (p-1)$, 那么 $2^{\alpha+1} \mid \phi(n)$, 而 $\alpha + 1 > \frac{\alpha+1}{2}$, 所以 $S_2(n) = \phi(n)$ 也不可能成立! 同理 $p - 1$ 也不可能含有其它奇素因子, 因为 $S_2(2^\alpha p^\beta)$ 只含有两个素因子! 所以 $p - 1 = 2$, $p = 3$. 经验证

$$n = 2\cdot 3^2,\ 2\cdot 3^3$$

是方程 $S_2(n) = \phi(n)$ 的解.

综合以上分析, 推出方程 $S_2(n) = \phi(n)$ 成立当且仅当 $n = 1,\ 4,\ 8,\ 18,\ 54$. 于是完成了定理 1 的证明.

现在证明定理 2.

当 $k \geq 3$ 时, 容易验证 $n = 1$ 满足方程 $S_k(n) = \phi(n)$. 于是假定 $n > 1$. 以下分两种情况讨论.

当 $n=2^\alpha$ 时, 如果 $\alpha\le k$, 那么 $S_k(2^\alpha)=2$, 而 $\phi(2^\alpha)=2^{\alpha-1}$. 所以此时方程 $S_k(2^\alpha)=\phi(2^\alpha)$ 成立当且仅当 $\alpha=2$, 即就是 $n=4$. 当 $\alpha>k$ 时, 因为 $S_k(2^\alpha)\le 2^{\frac{\alpha+k-1}{k}}$, 而 $\phi(2^\alpha)=2^{\alpha-1}$. 显然 $\alpha-1>\frac{\alpha+k-1}{k}$, 所以当 $\alpha>k$ 时方程 $S_k(2^\alpha)=\phi(2^\alpha)$ 不可能成立！

当 n 至少含有两个素因子时, 由于 $\phi(n)$ 为偶数, 所以可设 $n=2^\alpha p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 其中 $\alpha\ge1$ 及 $r\ge1$. 显然 $r<2$. 若不然, 则 $r\ge2$, 此时由 Euler 函数的性质知 $2^{\alpha+1}$ 整除 $\phi(n)$, 而 $S_k(n)$ 中含有 2 的方幂最多为 $\frac{\alpha+k-1}{k}$, 这是不可能的, 因为 $\alpha+1>\frac{\alpha+k-1}{k}$. 当 $r=1$ 时, 由于 $\alpha+1>\frac{\alpha+k-1}{k}$, 所以 4 不整除 $p-1$ 且 $p-1$ 不含其它奇素因子. 因此, $p-1=2$, $p=3$. 此时可设 $n=2^\alpha p^\beta$. 当 $\beta\ge3$ 时, 由于 $p^{\beta-1}$ 恰好整除 $\phi(n)$, 而 $S_k(n)$ 中含有素数 p 的方幂最多为 $\frac{\beta+k-1}{k}$, 但是 $\beta-1>\frac{\beta+k-1}{k}$, 所以 $S_k(2^\alpha p^\beta)=\phi(2^\alpha p^\beta)$ 是不可能的! 于是有 $\beta\le2$, 经验证可知 $n=2\cdot3^2=18$ 满足方程 $S_k(n)=\phi(n)$.

综合以上各种情况可得当 $k\ge3$ 时, 方程 $S_k(n)=\phi(n)$ 当且仅当 $n=1,\ 4,\ 18$. 于是完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago:Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Sabin Tabirca, Tatiana Tairca. Some new results concerning the Smarandache ceil function[J]. Smarandache Notions Journal, book series, 2002,13:30-36.

[3] Ren Dongmei. On the Smarandache Ceil Function and the Dirichlet Divisor Function[C]// Research on Smarandache problems in number theory (Vol.II), Phoenix:Hexis, 2005:51-54.

[4] Xu Zhefeng. On the Smarandache Ceil Function and the Number of Prime Factors[C]// Research on Smarandache problems in number theory, Phoenix:Hexis, 2004:71-76.

[5] Lu Yaming. On a Dual Function of the Smarandache Ceil Function[C]// Research on Smarandache problems in number theory (Vol.II). Phoenix:Hexis, 2005:54-57.

[6] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的值分布[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007,23(2):235-238.

[7] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社, 2007.

[8] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York:Springer-Verlag, 1976.

An equation involving the Euler function and the Smarandache ceil function of *k* order and its positive integer solutions

ZHU Min-hui

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710069,China)

Abstract: Let k be a fixed positive integer with $k\ge2$. For any positive integer n, the Smarandache ceil function of k order is defined as $S_k(n)=\min\{x:\ x\in\mathbb{N},\ n\mid x^k\}$. The main purpose of this paper is using the elementary method to study the solvability of the equation $S_k(n)=\phi(n)$, and obtain its all positive integer solutions, where $\phi(n)$ is the Euler function.

Keywords: Smarandache ceil function of k order, Euler function, equation, positive integer solutions.

2000MSC: 11B83